基于循环差集的最佳高斯整数序列构造

刘 凯[1,2],倪 佳[1,2]

(1. 燕山大学信息科学与工程学院,河北秦皇岛 066004;2. 河北省信息传输与信号处理重点实验室,河北秦皇岛 066004)

摘 要: 最佳高斯整数序列应用于通信系统不仅能抑制干扰,还可获得高的传输速率和频谱利用率.本文基于循环差集给出了构造自由度为2的最佳高斯整数序列的充要条件,比较现有文献,可获得更高能量效率的最佳高斯整数序列.同时,利用上采样和过滤技术扩展了最佳高斯整数序列的长度和自由度.本文方法能得到大量适于高速通信系统的最佳高斯整数序列,扩展了通信地址码的选择范围.

关键词: 最佳高斯整数序列; 循环差集; 自由度; 能量效率

中图分类号: TN911. 2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2021)08-1474-06

电子学报 URL: http://www. ejournal. org. cn **DOI:** 10. 12263/DZXB. 20200239

Construction of Perfect Gaussian Integer Sequences Based on Cyclic Difference Sets

LIU Kai[1,2], NI Jia[1,2]

(1. *School of Information Science and Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao*, *Hebei* 066004, *China*;
2. *Hebei Province Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing*, *Qinhuangdao*, *Hebei* 066004, *China*)

Abstract: Perfect Gaussian integer sequences applied to communication systems can not only restrain disturbance, but also obtain high transmission rates and spectrum utilization. In this paper, the sufficient and necessary condition for constructing the perfect Gaussian integer sequences with 2-degree freedom is given based on the cyclic difference sets. The perfect Gaussian integer sequences with higher energy efficiency can be obtained compared to the existing literatures. The length and degree of freedom of the perfect Gaussian integer sequences are extended by up-sampling and filtering. A large number of perfect Gaussian integer sequences obtained in this paper are suitable for high speed communication applications, which expands the selection range of address codes.

Key words: perfect Gaussian integer sequences; cyclic difference sets; degree of freedom; energy efficiency

1 引言

高斯整数序列是一类复序列,其实部和虚部均由整数构成,通信中广泛应用的四元序列和正交幅度调制(Quadrature Amplitude Modulation, QAM)序列是高斯整数序列的特殊形式. 高斯整数序列不同于传统的多相序列,它不是单位圆上的复数根序列,因此其相位和幅值都可用于信息传输,从而提高传输效率和频谱利用率. 鉴于高斯整数序列具有这种优良的传输性质,正交频分复用(Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM)系统[1,2]和码分多址(Code Division Multiple Access, CDMA)系统[3,4]将其作为新型地址码应用于高速通信传输.

近年来,具有良好自相关性能的高斯整数序列设计得到了广泛的研究. 基于序列的结构特征,文献[5]结合多电平最佳序列,利用组合与映射关系得到了偶周期最佳高斯整数序列;文献[6]利用交织和映射方法将两个长度为N的最佳整数序列生成了$2N$长的最佳高斯整数序列;文献[7]利用上采样技术得到了任意组合长度的最佳高斯整数序列;文献[8]基于两组基序列的线性组合及其循环移位得到最佳高斯整数序列;文献[9]基于全通多项式构造了N长N自由度的最佳高斯整数序列,并利用对称设计和差集进一步降低序列的自由度. 基于有限域的分圆理论,文献[10]利用2阶和4阶分圆构造了长度为奇素数、自由度为3和5的最佳高斯整数序列;文献[11]利用Whiteman广义分圆在有限域$G(N)$中构造了自由度为3和5的最佳高斯整数序

收稿日期:2020-03-06;修回日期:2021-04-28;责任编辑:李勇锋
基金项目:河北省自然科学基金(No.F2020203043); 河北省高等学校科学技术研究项目(No.ZD2020179)

列,其中 $N = p(p + 2)$,p 为素数;文献[12]利用最佳序列恒幅性质基于2阶和4阶分圆类构造了长为奇素数、自由度分别为3和5的最佳高斯整数序列;文献[13]基于2阶分圆构造了一类高能量效率的奇素数长、自由度为2的最佳高斯整数序列,并利用系数序列和交织操作将其扩展为偶数长的最佳高斯整数序列. 基于循环差集理论,文献[14~16]构造了不同的自由度为2的最佳高斯整数序列;文献[17]基于$\left(N,\frac{N-2}{2},\frac{N-3}{4}\right)$循环差集以及复数变换构造了自由度为4的$2N$长最佳高斯整数序列. 此外,文献[18]提出将最佳高斯整数序列设计问题转换为线性方程组求解的问题,得到了自由度为k+1的构造结果,序列周期N=p^k,p为素数;为了获得适合通信传输的具有高能量效率的构造结果,文献[19]利用迹函数运算构造最佳高斯整数序列,随着序列长度增至近于10^6时,能量效率趋近于1.

目前最佳高斯整数序列的研究成果较为丰富,但是适合实际通信传输环境的序列设计却不多,由于高斯整数序列是一类非等幅序列,因此在通信传输中考虑序列的能量效率是非常必要的. 文献[13,19]的设计将这一通信指标作为构造条件,但是在序列长度上有一定限制,为了获得具有高能量效率的更多长度范围的最佳高斯整数序列,本文基于循环差集给出了相应构造方法,相比同是利用差集构造最佳高斯整数序列的文献[14~16]可得到更多具有高能量效率的设计结果,在表3中用对比数据加以佐证.

2　预备知识

定义1　两个复序列 $\boldsymbol{a} = (a(t)|0 \leqslant t < N)$ 和 $\boldsymbol{b} = (b(t)|0 \leqslant t < N)$ 的互相关函数定义为

$$R_{ab}(\tau) = \sum_{t=0}^{N-1} a(t)b^*(t+\tau) \tag{1}$$

其中,*表示复共轭,$t+\tau = (t+\tau)_{\bmod N}$,下文同. 当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ 时称为周期自相关函数,记为 $R_a(\tau)$.

定义2　设高斯整数序列 $\boldsymbol{s}$=$(s(t)$=$a(t)$+i$b(t)$| $0 \leqslant t < N)$,其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$,$a(t), b(t) \in \mathrm{Z}$,Z表示整数集,则$\boldsymbol{s}$自相关函数为

$$\begin{aligned} R_s(\tau) &= \sum_{t=0}^{N-1} s(t)s^*(t+\tau) \\ &= (R_a(\tau) + R_b(\tau)) - \mathrm{i}(R_{ab}(\tau) - R_{ba}(\tau)) \end{aligned} \tag{2}$$

若满足

$$R_s(\tau) = \begin{cases} E, & \tau = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{3}$$

则序列$\boldsymbol{s}$为最佳高斯整数序列,其中E不为0.

定义3　一个(v,k,λ)−循环差集 $D = \{d_1, d_2, \cdots, d_k\}$ 是k个模v的剩余集合,满足对任何一个不同余0的模v剩余α,在D中的同余方程 $d_i - d_j \equiv \alpha(\bmod v)$ 都恰有λ组解(d_i, d_j). 令 $k - \lambda = n$,称D为n阶差集. 已知的循环差集例举如下:

(1) $\left(\frac{q^{m+2}-1}{q-1},\frac{q^{m+1}-1}{q-1},\frac{q^m-1}{q-1}\right)$差集,$q$为素数幂,且 $m \geqslant 1$[14];

(2) $(l^2+l+1, l+1, 1)$差集,其中l为素数[15];

(3) $(\theta^3+\theta^2+\theta+1, \theta^2+\theta+1, \theta+1)$差集,其中$\theta$为素数[15];

(4) $\left(pq,\frac{pq-1}{4},\frac{pq-5}{16}\right)$差集,其中$p$, $q = 3p+2$都是素数,$e = (p-1, q-1) = 4$[15];

(5) 循环Paley-Hadamard差集[20]:

$\left(p,\frac{p-1}{2},\frac{p-3}{4}\right)$,其中$p \equiv 3(\mathrm{mod}4)$为素数;

$(2^t-1, 2^{t-1}-1, 2^{t-2}-1)$,其中$t \geqslant 2$;

$\left(l,\frac{l-1}{2},\frac{l-3}{4}\right)$,其中 $l = p(p+2)$,且p和p+2都是素数;

$\left(p,\frac{p-1}{2},\frac{p-3}{4}\right)$,其中$p = 4s^2 + 27$为素数.

定义4　设高斯整数序列 $\boldsymbol{s} = (s(t)|0 \leqslant t < N)$,对$\boldsymbol{s}$上采样得到$mN$长的高斯整数序列 $\boldsymbol{s}' = (s'(t)|0 \leqslant t < mN)$,其中

$$s'(t) = \begin{cases} s\left(\frac{t}{m}\right), & t = 0, m, 2m, \cdots, (N-1)m \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{4}$$

引理1[7]　若将高斯整数序列$\boldsymbol{s}$含有不同非零元素的个数k称为自由度,记为k-degree,那么k-degree的最佳高斯整数序列经上采样得到的序列$\boldsymbol{s}'$仍是k-degree最佳高斯整数序列.

定义5　设序列 $\boldsymbol{a} = (a(t)|0 \leqslant t < N)$ 和 $\boldsymbol{b} = (b(t)|0 \leqslant t < N)$,定义序列$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$经过滤操作生成的序列$\boldsymbol{u}$为

$$u(n) = a(t) \circ b(t+n) = R_{ab}(n),\quad 0 \leqslant t, n < N \tag{5}$$

引理2[21]　若过滤序列$\boldsymbol{b}$为最佳序列,基序列$\boldsymbol{a}$经$\boldsymbol{b}$过滤后得到的过滤序列$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{a}$具有相同的相关特性.

引理3[22]　若序列 $\boldsymbol{s} = (s(t)|0 \leqslant t < N)$ 为恒模序列,即 $|s(t)| = \kappa$,当且仅当经离散傅里叶变换(DFT)后的谱序列 $\boldsymbol{S} = (S(k)|0 \leqslant k < N)$ 为最佳序列;反之,若谱序列$\boldsymbol{S}$为恒模序列,当且仅当离散傅里叶反变换(IDFT)序列$\boldsymbol{s}$为最佳序列.

定义6[8]　序列 $\boldsymbol{s} = (s(t)|0 \leqslant t < N)$ 的能量效率η定义为

$$\eta = \frac{E_s}{\max\limits_{0 \leqslant t < N} |s(t)|^2} \tag{6}$$

其中，$E_s=\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}\left|s(t)\right|^2$为信号的平均能量.

3 最佳高斯整数序列的构造

3.1 基于差集的2-degree最佳高斯整数序列构造

依据定义2可知，若整数序列$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$满足当$\tau\neq 0$时$R_a(\tau)+R_b(\tau)=0$以及对于$\forall\tau$有$R_{ab}(\tau)=R_{ba}(\tau)$，那么序列$\boldsymbol{s}$即为最佳高斯整数序列. 基于以上条件，下面构造最佳高斯整数序列.

设复序列$\boldsymbol{s}=(s(t)=a(t)+\mathrm{i}b(t)|0\leqslant t<N)$，其中$b(t)=K, a(t)=\begin{cases}A, t\in D\\ B, t\notin D\end{cases}$或$a(t)=K, b(t)=\begin{cases}A, t\in D\\ B, t\notin D\end{cases}$，即

$$s(t)=\begin{cases}A+\mathrm{i}K, t\in D\\ B+\mathrm{i}K, t\notin D\end{cases}\text{或}s(t)=\begin{cases}K+\mathrm{i}A, t\in D\\ K+\mathrm{i}B, t\notin D\end{cases}\quad(7)$$

其中，A、B、K是不全为0的整数，D为(v,k,λ)-循环差集，且$N=v$.

定理1 上述条件构造的序列$\boldsymbol{s}$为2-degree最佳高斯整数序列的充要条件为

$$\lambda A^2+2(k-\lambda)AB+(v-2k+\lambda)B^2=-vK^2\quad(8)$$

证明 设序列$\boldsymbol{b}$为恒值序列，且不为0，因此有$R_{ab}(\tau)=R_{ba}(\tau)$，序列$\boldsymbol{s}$为2-degree序列. 序列$\boldsymbol{a}$的周期自相关函数为

$$\begin{aligned}R_a(\tau)&=\sum_{t=0}^{N-1}a(t)a^*(t+\tau)\\&=\sum_{t\in D,t+\tau\in D}AA+\sum_{t\in D,t+\tau\in D^c}AB\\&\quad+\sum_{t\in D^c,t+\tau\in D}BA+\sum_{t\in D^c,t+\tau\in D^c}BB\\&=\lambda A^2+2(k-\lambda)AB+(v-2k+\lambda)B^2\end{aligned}\quad(9)$$

其中，$D^c=Z_v\backslash D$. 由于$R_b(\tau)=vK^2$，那么

$$\begin{aligned}R_a(\tau)+R_b(\tau)=\lambda A^2&+2(k-\lambda)AB\\&+(v-2k+\lambda)B^2+vK^2\end{aligned}\quad(10)$$

由定义2可知，若$\boldsymbol{s}$为最佳高斯整数序列，当且仅当$\tau\neq0$时$R_a(\tau)+R_b(\tau)=0$，即$\lambda A^2+2(k-\lambda)AB+(v-2k+\lambda)B^2=-vK^2$. 证毕

例1 给定一个(7,3,1)-循环差集$D=\{1,2,4\}$，那么$N=7$为奇素数. 取$K=1$，则由定理1计算可得$A=-5$，$B=2$，则序列$\boldsymbol{a}=(2,-5,-5,2,-5,2,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,1,1,1,1,1)$，可得$\boldsymbol{s}=(2+\mathrm{i},-5+\mathrm{i},-5+\mathrm{i},2+\mathrm{i},-5+\mathrm{i},2+\mathrm{i},2+\mathrm{i})$ 或 $\boldsymbol{s}=(1+2\mathrm{i},1-5\mathrm{i},1-5\mathrm{i},1+2\mathrm{i},1-5\mathrm{i},1+2\mathrm{i},1+2\mathrm{i})$，其相关函数为$R_s(\tau)=(98,0_6)$，其中$0_6$表示6个0，即$\boldsymbol{s}$为7长2-degree最佳高斯整数序列.

例2 给定一个(40,13,4)-循环差集，D=｛1,2,3,5,6,9,14,15,18,20,25,27,35｝，$N=40$. 取$K=3$，那么由式(8)解得$A=-27$和$B=13$，即$s(t)=\begin{cases}-27+3\mathrm{i}, t\in D\\ 13+3\mathrm{i},\quad t\notin D\end{cases}$或$s(t)=\begin{cases}13+3\mathrm{i},\quad t\in D\\ -27+3\mathrm{i}, t\notin D\end{cases}$，则自相关函数为$R_s(\tau)=(14400,0_{39})$，即得到长度为40的2-degree最佳高斯整数序列.

以上构造方法借助了循环差集的性质，根据定义3中的若干循环差集和定理1，可得到对应参数下约束条件，见表1. 根据表1中的参数条件，可得到大量构造结果，序列长度由循环差集的参数v决定，其中$A,B,K\in[-100,100]$，且$K\neq0$时得到解的个数.

3.2 上采样法构造3-degree的mN长最佳高斯整数序列

为了更好地满足实际工程需要，利用上采样和过滤法可将N长的2-degree最佳高斯整数序列扩展为mN长的3-degree最佳高斯整数序列. 最佳高斯整数序列上采样后仍为最佳序列，但序列中含有m个0. 为了消除0在通信传输中易造成的误码影响，可利用等长最佳序列与采样序列进行过滤，具体算法如算法1所示.

算法1 3-degreeN'长最佳高斯整数序列构造

输入：N长最佳高斯整数序列$\boldsymbol{s}$，2-degree序列

$$v(t)=\begin{cases}a+b\mathrm{i},\quad t=0\\ c+d\mathrm{i},\quad 0<t<N'\end{cases}$$

输出：N'长3-degree最佳高斯整数序列$\boldsymbol{u}=(u(n)|0\leqslant n<N')$，其中$N'=mN$.

①对N长最佳高斯整数序列$\boldsymbol{s}$上采样，得到mN长的最佳高斯整数序列$\boldsymbol{s}'=(s'(t)|0\leqslant t<N', N'=mN)$，其中

$$s'(t)=\begin{cases}s\left(\frac{t}{m}\right), t=0,m,\cdots,(N-1)m\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

②对$\boldsymbol{v}$进行DFT变换，得到谱序列$\boldsymbol{V}=\{V(k)|0\leqslant k<N'\}$为

$$V(k)=\begin{cases}\sum_{t=0}^{N'-1}v(t), k=0\\ v(0)-v(t)_{t\neq0}, k\neq0\end{cases}$$

当$|V(k)|$为恒值时$\boldsymbol{v}$为最佳序列，即$(N'-2)(c^2+d^2)+2(ac+bd)=0$；令$a=N'-1, b=d=\pm1, c=-1$，得到$v(t)=\begin{cases}(N'-1)\pm\mathrm{i}, t=0\\ -1\pm\mathrm{i}, 0<t<N'\end{cases}$，那么$|V(k)|=N'$；

③利用完备序列$\boldsymbol{v}$对$\boldsymbol{s}'$进行过滤，得到3-degree的最佳高斯整数序列$\boldsymbol{u}$，其中$u(n)=s'(t)\circ v(t+n)=R_{s',v}(n), 0\leqslant t,n<N'$.

需要说明的是步骤②构造的最佳高斯整数序列不适合通信传输应用，这是由于其序列组成形式除$t=0$外均为等值序列. 而作为过滤序列，$\boldsymbol{v}$不仅可有效去除采样后0值对序列的影响，而且可有效控制自由度的增长，这在一些通信应用中是必要的[18].

例3 取例1中$N=7$长的最佳高斯整数序列$\boldsymbol{s}=(2+\mathrm{i},-5+\mathrm{i},-5+\mathrm{i},2+\mathrm{i},-5+\mathrm{i},2+\mathrm{i},2+\mathrm{i})$作为基序列，令$m=2$，根据步骤①对$\boldsymbol{s}$进行上采样操作，得到

表1　几类循环差集下定理1的参数约束条件

循环差集	充要条件	参数举例	解的个数
$(l^2+l+1,l+1,1)$,l为素数	$A^2+2lAB+(l^2-l)B^2=-(l^2+l+1)K^2$	$l=2$时,$A^2+4AB+2B^2=-7K^2$	528
$(\theta^3+\theta^2+\theta+1,\theta^2+\theta+1,\theta+1)$,$\theta$为素数	$(\theta+1)A^2+2\theta^3AB+(\theta^3-\theta^2)B^2=-(\theta^3+\theta^2+\theta+1)K^2$	$\theta=3$时,$4A^2+18AB+18B^2=-40K^2$	72
$\left(pq,\frac{pq-1}{4},\frac{pq-5}{16}\right)$,$p$和$q=3p+2$为素数	$\frac{pq-5}{16}A^2+\frac{3pq+1}{8}AB+\frac{30-9pq}{16}B^2=-pqK^2$	$p=5,q=17$时,$5A^2+32AB+48B^2=-85K^2$	4
$\left(\frac{q^{m+2}-1}{q-1},\frac{q^{m+1}-1}{q-1},\frac{q^m-1}{q-1}\right)$,$q$为素数幂,$m\geqslant 1$	$\frac{q^m-1}{q-1}A^2+\frac{2(q^{m+1}-q^m)}{q-1}AB+\frac{q^{m+2}-2q^{m+1}+q^m}{q-1}B^2=\frac{1-q^{m+2}}{q-1}K^2$	$q=4,m=2$时,$5A^2+32AB+48B^2=-85K^2$	4
$\left(p,\frac{p-1}{2},\frac{p-3}{4}\right)$,$p\equiv 3(\mathrm{mod}4)$	$\frac{p-3}{4}A^2+\frac{p+1}{2}AB+\frac{p+1}{4}B^2=-pK^2$	$p=19$时,$4A^2+10AB+5B^2=-19K^2$	328
$(2^t-1,2^{t-1}-1,2^{t-2}-1)$,$t\geqslant 2$	$(2^{t-2}-1)A^2+(2^t-2^{t-1})AB+2^{t-2}B^2=(1-2^t)K^2$	$t=6$时,$15A^2+32AB+16B^2=-63K^2$	36
$\left(l,\frac{l-1}{2},\frac{l-3}{4}\right)$,$l=p(p+2)$,$p$和$q=p+2$为素数	$\frac{l-3}{4}A^2+\frac{l+1}{2}AB+\frac{l+1}{4}B^2=-lK^2$	$l=15$时,$3A^2+8AB+4B^2=-15K^2$	216
$\left(p,\frac{p-1}{2},\frac{p-3}{4}\right)$,$p=4s^2+27$为素数	$\frac{p-3}{4}A^2+\frac{p+1}{2}AB+\frac{p+1}{4}B^2=-pK^2$	$p=31$时,$7A^2+16AB+8B^2=-31K^2$	112

$N'=14$的采样序列

$$\boldsymbol{s}'=(2+\mathrm{i},0,-5+\mathrm{i},0,-5+\mathrm{i},0,2+\mathrm{i},0,-5+\mathrm{i},0,2+\mathrm{i},0,2+\mathrm{i},0)$$

按步骤②得到过滤序列

$$\boldsymbol{v}=(13+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i})$$

再由步骤③得到

$$\boldsymbol{u}=(42+14\mathrm{i},14,42+14\mathrm{i},14,42+14\mathrm{i},14,-56+14\mathrm{i},14,42+14\mathrm{i},14,-56+14\mathrm{i},14,-56+14\mathrm{i},14)$$

其相关函数$R_{\boldsymbol{u}}(\tau)=(19208,0_{13})$,$\boldsymbol{u}$是14长的3-degree最佳高斯整数序列.

关于过滤序列的选取,除本文所构造的2-degree的任意长最佳高斯整数序列外,也可利用文献[9]的高自由度最佳高斯整数序列.

4　性能分析

由定义6和定理1可得序列$\boldsymbol{s}$的能量效率为

$$\eta=\frac{E_s}{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant N-1}\left|s(t)\right|^2}=\frac{E_s}{\max\left\{A^2+K^2,B^2+K^2\right\}}\tag{11}$$

其中,$E_s=\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}\left|s(t)\right|^2=\frac{1}{N}\left[k(A^2+K^2)+(v-k)(B^2+K^2)\right]$. 由于$v=N$,设$A\geqslant B$,则

$$\eta=\frac{1}{v}\left(k+(v-k)\frac{B^2+K^2}{A^2+K^2}\right)\tag{12}$$

可见,当循环差集参数v和k固定时,B^2+K^2和A^2+K^2越逼近,能量效率越趋近于1.

作者在文献[13]中利用二阶分圆类构造了最佳高斯整数序列,本文方法区别于文献[13],基于循环差集可得到长度更丰富的最佳高斯整数序列,而基于分圆只能获得奇素数长度,表2给出了非奇素数长的高能量效率最佳高斯整数序列举例,这是文献[13]不能构造的设计结果.

表2　基于循环差集的具有高能量效率的序列举例

L	η	(v,k,λ) 循环差集	$(A+\mathrm{i}K,B+\mathrm{i}K)$
15	98.4%	(15,7,3)	(−62+16i,61+16i)
35	95.1%	(35,17,8)	(−18+3i,19+3i)
39	95.4%	(39,19,9)	(−19+3i,20+3i)
51	97.8%	(51,25,12)	(−43+6i,44+6i)
63	97.1%	(63,31,15)	(−32+4i,33+4i)

文献[14]基于循环差集提出了构造最佳高斯整数序列的充分条件,限制条件为差集阶数n需为平方数,而本文的构造方法对差集阶数无任何约束,从而放宽了差集的选择范围;文献[15]基于循环差集给出了最佳高斯整数序列的充要条件,依据该条件在不同差集下得到了序列的相应参数形式,但不能覆盖本文设计结果,因此定理1可以获得新的最佳高斯整数序列构造结果;文献[16]基于循环差集得到固定虚部的最佳高

斯整数序列,其参数形式仅为定理1解的一种情况. 基于以上分析,表3基于不同长度的循环差集,将定理1分别与文献[14~16]的构造结果进行比较,并计算了对应的能量效率.

表3显示,本文得到了与以往文献不同的构造结果,且除15长的文献[14]构造结果外都具有更高的能量效率. 文献[14]的构造序列在所列长度中仅存在15长,借助于计算机辅助对参数逼近得到序列能量效率的最佳搜索结果为 $\eta_{\max} = 99.99\%$,此时序列由参数(8802+6818i, −4401 − 10227i)构成,实部和虚部的数值较大,不易于工程实现. 本文与文献[15,16]相比,能量效率得到明显提升.

表3 相同循环差集下的最佳高斯整数序列及其能量效率的对比

(v,k,λ)		(7,3,1)	(15,7,3)	(19,9,4)	(67,33,16)	(71,35,17)
循环差集举例		{1,2,4}	{0,1,2,4,5,8,10}	{1,4,5,6,7,9,11,16,17}	{1,4,6,9,10,14,15,16,17,19,21,22,23,24,25,27,29,33,35,36,37,39,40,47,49,54,55,56,59,60,62,64,65}	{1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,19,20,24,25,27,29,30,32,36,37,38,40,43,45,48,49,50,54,57,58,60,64}
(α_D, α_{D^c})	[14]	×	(8802 + 1688i, −4401 − 10227i)	×	×	×
	[15]	(1 + i, − i)	$(-2x-2\mathrm{i}y, x+\mathrm{i}y)$	$(-(2x-y)-\mathrm{i}(2y+x), 2x+2\mathrm{i}y)$	$(-(4x-y)-\mathrm{i}(4y+x), 4x+4\mathrm{i}y)$	(3 − 3i, − 3 + 2i)
	[16]	(3 + i, − 4 + i)	(8 + 2i, − 7 + 2i)	(12 + i, − 11 + i)	(38 + i, − 37 + i)	(39 + 3i, − 38 + 3i)
	本文	(45 + 17i, − 44 + 17i)	(−62 + 16i, 61 + 16i)	(−48 + 11i, 49 + 11i)	(434 + 53i, − 431 + 53i)	(−177 + 21i, 176 + 21i)
能量效率 η	[14]	×	99.99%	×	×	×
	[15]	71.4%	60%	89.5%	97%	89.5%
	[16]	82.4%	88.2%	91.6%	97.4%	97.5%
	本文	97.8%	98.4%	98.2%	99.3%	99.4%

5 结论

本文基于循环差集提出了能获得具有高能量效率的最佳高斯整数序列的构造方法. 通过设定最佳高斯整数序列的实部或虚部为恒值,并借助循环差集的性质得到了构造2-degree最佳高斯整数序列的充要条件,通过参数的选取,易获得高能量效率序列. 此外,利用上采样和过滤操作将最佳高斯整数序列扩展为高自由度的 mN 长最佳高斯整数序列,补充了最佳高斯整数序列的自由度和长度范围. 本文构造的大量最佳高斯整数序列适于工程实际应用,可作为通信地址码的选择形式之一.

参考文献

[1] Chong C V, Venkataramani R, Tarokh V. A new construction of 16-QAM Golay complementary sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2003, 49(11): 2953 – 2959.

[2] Chang C Y, Li Y, Hirata J. New 64-QAM Golay complementary sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(5): 2479 – 2485.

[3] Huber K. Codes over Gaussian integers[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1994, 40(1): 207 – 216.

[4] Deng X M, Fan P Z, Suehiro N. Sequences with zero correlation over Gaussian integers [J]. Electronics Letters, 2000, 36(6): 552 – 553.

[5] 陈晓玉, 许成谦, 李玉博. 新的最佳高斯整数序列的构造方法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(9): 2081 – 2085.
Chen X Y, Xu C Q, Li Y B. New constructions of perfect Gaussian integer sequences[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2014, 36(9): 2081 – 2085. (in Chinese)

[6] Peng X P, Xu C Q. New constructions of perfect Gaussian integer sequences of even length[J]. IEEE Communications Letters, 2014, 18(9): 1547 – 1550.

[7] Chang H H, Li C P, Lee C D, et al. Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary composite length[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(7): 4107 – 4115.

[8] Hu W W, Wang S H, Li C P. Gaussian integer sequences with ideal periodic autocorrelation functions[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(11): 6074 – 6079.

[9] Pei S C, Chang K W. Arbitrary length perfect integer sequences using all-pass polynomial[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2019, 26(8): 1112 – 1116.

[10] Yang Y, Tang X H, Zhou Z C. Perfect Gaussian integer se-

quences of odd prime length[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2012, 19(10): 615 – 618.

[11] Ma X, Wen Q, Zhang J, et al. New perfect Gaussian integer sequences of period *pq*[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications & Computer Sciences, 2013, 96(11): 2290 – 2293.

[12] 李玉博, 陈邈, 刘涛, 等. 长度为奇素数的最佳高斯整数序列构造法[J]. 通信学报, 2018, 39(11): 190 – 197.
Li Y B, Chen Y, Liu T, et al. Constructions of perfect Gaussian integer sequences of odd prime length[J]. Journal on Communications, 2018, 39(11): 190 – 197. (in Chinese)

[13] 刘凯, 马国斌, 陈盼盼. 基于分圆类的最佳高斯整数序列构造[J]. 电子学报, 2019, 47(4): 806 – 811.
Liu K, Ma G B, Chen P P. Construction of perfect Gaussian integer sequences based on cyclotomic classes[J]. Acta Electronica Sinica, 2019, 47(4): 806 – 811. (in Chinese)

[14] Chen X J, Li C L, Rong C M. Perfect Gaussian integer sequences from cyclic difference sets[A]. IEEE International Symposium on Information Theory[C]. Barcelona, Spain: IEEE, 2016. 115 – 119.

[15] Wang S H, Chang H H, Lee C D, et al. Further results on degree-2 perfect Gaussian integer sequences[J]. IET Communications, 2016, 10(12): 1542 – 1552.

[16] Liu T, Xu C Q, Li Y B, LIU K. New perfect Gaussian integer sequences from cyclic difference sets[J]. IEICE Transactions on Fundamental of Electronics Communications and Computer Sciences, 2017, E100-A(12): 3067 – 3070.

[17] Peng X P, Ren J D, Xu C Q, et al. Perfect Gaussian integer sequences of degree-4 using difference sets[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications & Computer Sciences, 2016, E99-A (12): 2604 – 2608.

[18] Chang K J, Chang H H. Perfect Gaussian integer sequences of period p^k with degrees equal to or less than k+1[J]. IEEE Transactions on Communications, 2017, 65(9): 3723 – 3733.

[19] Lee C D, Hong S H. Generation of long perfect Gaussian integer sequences[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(4): 515 – 519.

[20] Arasu K T, Ding C, Helleseth T, et al. Almost difference sets and their sequences with optimal autocorrelation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(7): 2934 – 2943.

[21] Liu Y C, Chen C W, Su Y T. New constructions of zero-correlation zone sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(8): 4994 – 5007.

[22] Benedetto J J, Konstantinidis I, Rangaswamy M. Phase-coded waveforms and their design[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2009, 26(1): 22 – 31.

作者简介

刘 凯(通信作者) 女,1977年5月出生,黑龙江齐齐哈尔人.现为燕山大学信息科学与工程学院副教授、硕士生导师.研究方向为无线通信编码理论.
E-mail: liukai@ysu.edu.cn

倪 佳 女,1995年12月出生,河北秦皇岛人.现为燕山大学信息科学与工程学院硕士研究生.研究方向为扩频序列设计.
E-mail: 2606494794@qq.com